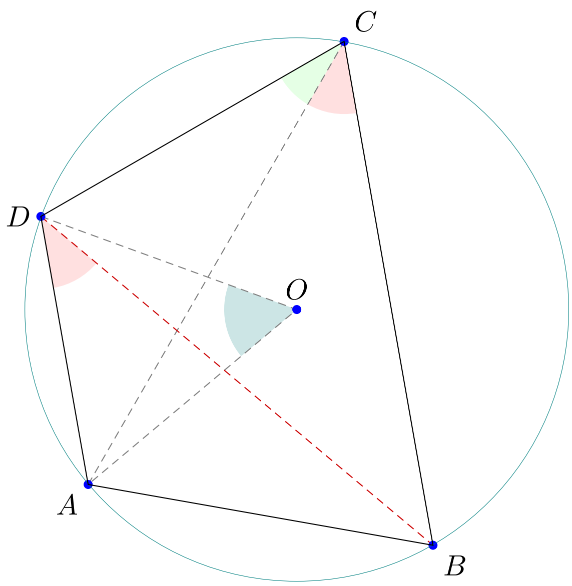
SOLUZIONI

Problema 1 [154]
I valori minimo e massimo possibile per $693n$ sono 100002 e 109992. Si esegue la divisione di 100002 e di 109992 per 693 e si verifica che n ha un valore compreso tra 145 e 158. Perché $693n$ abbia 2 come cifra delle unità, è necessario che la cifra delle unità di n sia 4. L'unico valore possibile di n è allora 154.

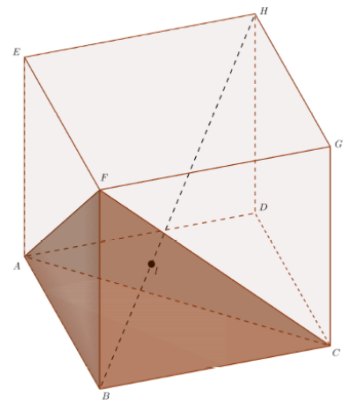
Problema 2 [110]



Si nota che $\widehat{DOA} = 60°$, dato che AD è pari al raggio della circonferenza. Pertanto, $\widehat{DCA} = \frac{\widehat{DOA}}{2} = 30°$ e inoltre $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 40°$, da cui $\widehat{DAB} = 180° - \widehat{DCB} = 110°$, che è la risposta.

Problema 3 [400] Chiamiamo C_1, C_2, C_3 le tre caselle tratteggiate, da sinistra a destra. Per motivi di simmetria, i percorsi che passano per C_1 sono esattamente altrettanti di quelli che passano per C_3. Calcoliamo i percorsi per C_1. Date le regole, è possibile accedere a C_1 o dalla casella a essa inferiore o da quella alla sua sinistra. Per arrivare alla casella sotto C_1 abbiamo $\frac{4!}{2!2!} = 6$, percorsi possibili, mentre per la casella a sinistra di C_1 ci sono $\frac{4!}{3!} = 4$ percorsi possibili. Esiste un unico modo di uscire da C_1, passando alla casella immediatamente superiore: da questa sono possibili $\frac{6!}{4!2!} = 15$ percorsi che conducono a B. Quindi in tutto i percorsi che passano per C_1 sono $6 \cdot 15 + 4 \cdot 15 = 150$. Come detto, anche i percorsi per C_3 devono essere 150.
Nella casella centrale, C_2, è possibile accedere solo da quella immediatamente inferiore e uscire solo da quella immediatamente superiore. Anche in questo caso, sempre per simmetria, i percorsi per arrivare da A fino a sotto C_2 sono altrettanto numerosi di quelli che portano dalla casella superiore a B. Per arrivare nella casella sottostante ci sono $\frac{5!}{3!2!} = 10$ percorsi. Quindi in totale, passando per C_2, ci sono $10 \cdot 10 = 100$ percorsi. Il totale è $150 + 150 + 100 = 400$.

Problema 4 [115] Sia $ABCDEFGH$ il cubo. La diagonale BH è perpendicolare alla faccia ACF. Chiamiamo con I il punto di intersezione di BH con ACF. Vogliamo calcolare la lunghezza del segmento IH. Considerando ABC come base del tetraedro e BF come altezza, il volume del tetraedro è pari a $\frac{1}{3} \cdot (\frac{10 \cdot 10}{2}) \cdot 10 = \frac{500}{3}$ cm^3. Ricalcoliamo il volume prendendo come base il triangolo ACF, che è equilatero e ha lato $10\sqrt{2}$ cm. L'area di ACF è $\frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 50\sqrt{3}$ cm^2.



Utilizziamo la formula inversa del volume per calcolare l'altezza BI e otteniamo $BI = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. L'altezza HI cercata è la differenza fra la diagonale $BH = 10\sqrt{3}$ e BI. Dunque $HI = 10\sqrt{3} - \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cioè $\frac{20\sqrt{3}}{3} \simeq 11,54$ cm. La risposta in millimetri è 115.

Problema 5 [4852]
La somma totale dei primi 100 numeri è $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$. A ogni passaggio svolto, la somma totale decresce di 2. Pertanto dopo 99 passaggi la somma totale sarà diminuita di $2 \cdot 99 = 198$. Ne consegue che l'ultimo numero rimasto è $5050 - 198 = 4852$.

Problema 6 [104]
Il testo conteneva un errore: il lato del triangolo equilatero ABC è 110 cm e non 120.
Dato che il segmento CD è sotteso da un angolo in A di 60°, sarà sufficiente costruire il triangolo equilatero CDE di lato CD inscritto nella circonferenza, con $CD = 100$ cm e calcolare il raggio della circonferenza. Dato che il lato di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r è $r\sqrt{3}$, il raggio sarà $\frac{100}{\sqrt{3}}$. L'area del cerchio, in cm^2, vale $\frac{10000\pi}{3} \simeq 10471$. La risposta, in dm^2, è 104.

Problema 7 [105]
La prima automobile percorre la pista impiegando un tempo $t = \frac{l}{140 \text{ km/h}}$, dove l è la lunghezza della pista; la seconda automobile percorre la pista impiegando un tempo $t' = \frac{l/2}{100 \text{ km/h}} + \frac{l/2}{180 \text{ km/h}}$. Quindi la differenza di tempo fra l'arrivo delle due automobili è $t' - t = l \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{360} - \frac{1}{140} \right) = \frac{l}{1575}$, da cui si ottiene $l = 1575(t' - t)$. Dato che 4 minuti equivale a $\frac{1}{15}$ di ora, $l = 1575 \cdot \frac{1}{15} = 105$. La lunghezza è dunque 105 km.

Problema 8 [254]
Scriviamo la frazione in questo modo: $\frac{2024+n}{n} = \frac{2024}{n} + 1 = p^2$. Quindi $\frac{2024}{n} = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ e infine $2024 = n(p-1)(p+1)$. Cerchiamo una scomposizione di 2024 in cui due fattori differiscono fra loro di 2 (dato che $p-1$ e $p+1$ distano di 2). La scomposizione dà $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Le uniche due possibilità sono: $p-1 = 2, p+1 = 4$, che dà $n = 11 \cdot 23 = 253$, e $p-1 = 2 \cdot 2 \cdot 11 = 44, p+1 = 2 \cdot 23 = 46$, che dà $n = 1$. Si verifica facilmente che non ci sono soluzioni per $n < 0$. Quindi la risposta è $253 + 1 = 254$.

Problema 9 [1350]
Sia $x = k + q$ un generico numero reale, con $k = \lfloor x \rfloor$ e $q = x - \lfloor x \rfloor$ (q è la parte frazionaria ed è compresa tra 0 e 1).
Notiamo che

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor = 6k + \lfloor q \rfloor + \lfloor 2q \rfloor + \lfloor 3q \rfloor = 6k + \lfloor 2q \rfloor + \lfloor 3q \rfloor.$$

Notiamo che $\lfloor 2q \rfloor + \lfloor 3q \rfloor < 2q + 3q = 5q < 5$ e quindi si tratta di capire che "resto" è possibile scrivere nell'espressione $6k + \lfloor 2q \rfloor + \lfloor 3q \rfloor$, rispetto alla divisione per 6.
Consideriamo i vari casi, a seconda dell'intervallo di appartenenza di q (dati i fattori 2 e 3, dividiamo l'intervallo $[0, 1]$ rispetto alla divisione per 6):

- se $0 \le q < \frac{1}{6}$, allora $0 < 2q < \frac{2}{6}$ e $0 < 3q < \frac{3}{6}$, da cui $\lfloor 2q \rfloor + \lfloor 3q \rfloor = 0$;
- se $\frac{1}{6} \le q < \frac{2}{6}$, allora $\frac{2}{6} < 2q < \frac{4}{6}$ e $\frac{3}{6} < 3q < \frac{6}{6}$, da cui $\lfloor 2q \rfloor + \lfloor 3q \rfloor = 0$;
- se $\frac{2}{6} \le q < \frac{3}{6}$, allora $\frac{4}{6} < 2q < 1$ e $1 < 3q < \frac{3}{2}$, da cui $\lfloor 2q \rfloor + \lfloor 3q \rfloor = 1$;
- se $\frac{3}{6} \le q < \frac{4}{6}$, allora $1 < 2q < \frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2} < 3q < 2$, da cui $\lfloor 2q \rfloor + \lfloor 3q \rfloor = 2$;
- se $\frac{4}{6} \le q < \frac{5}{6}$, allora $\frac{2}{6} < 2q < \frac{4}{6}$ e $\frac{3}{6} < 3q < \frac{6}{6}$, da cui $\lfloor 2q \rfloor + \lfloor 3q \rfloor = 3$;
- se $\frac{5}{6} \le q < 1$, allora $\frac{5}{3} < 2q < 2$ e $\frac{5}{2} < 3q < 3$, da cui $\lfloor 2q \rfloor + \lfloor 3q \rfloor = 3$;

In conclusione, $\lfloor 2q \rfloor + \lfloor 3q \rfloor$ può valere $0, 1, 2, 3$ e quindi rimangono esclusi $4, 5$. Pertanto, visto che $2024 = 2022 + 2$ è divisibile per 6, i numeri richiesti sono $\frac{4}{6} \cdot 2022 + 2 = 1350$.

Problema 10 [1625]
È noto che se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti interi e siano r e s due interi allora $(r-s)$ divide $p(r)-p(s)$. Infatti, se scriviamo esplicitamente $p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$ e $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$. La loro differenza è

$$p(r)-p(s) = a_n(r^n - s^n) + a_{n-1}(r^{n-1} - s^{n-1}) + \cdots + a_1(r-s)\,.$$

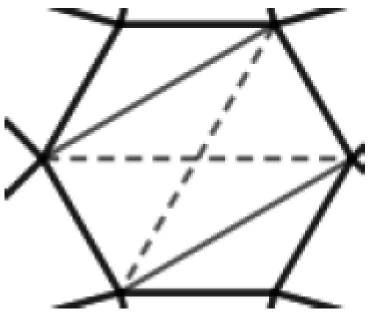
Dalle formule sulle differenze di potenze di grado n segue che ogni termine è divisibile per $(r-s)$ e quindi che $(r-s)$ divide $p(r)-p(s)$. Pertanto, nel nostro caso $2024-399 = 1625$ divide $p(2024)-p(399)$ e di conseguenza $p(2024)-p(399) = 1625k$ per un certo k intero positivo. Il valore minimo positivo che può assumere è 1625.

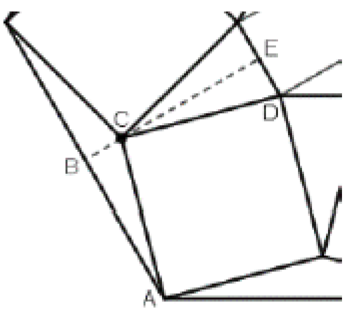
Problema 11 [100]
Che siano necessari almeno 100 cubetti è evidente, perché con 99 cubetti non si riesce nemmeno a completare l'ombra di 1 m^2 sul pavimento o su una delle pareti. Per dimostrare che bastano 100 cubetti è sufficiente esibire una configurazione. La figura va letta in questo modo: i cubetti sono visti dall'alto e tutti quelli contrassegnati col numero 1 sono poggiati sul pavimento, quelli col 2 sono sullo strato immediatamente superiore e così via fino al decimo strato.

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
9	8	7	6	5	4	3	2	1	10
8	7	6	5	4	3	2	1	10	9
7	6	5	4	3	2	1	10	9	8
6	5	4	3	2	1	10	9	8	7
5	4	3	2	1	10	9	8	7	6
4	3	2	1	10	9	8	7	6	5
3	2	1	10	9	8	7	6	5	4
2	1	10	9	8	7	6	5	4	3
1	10	9	8	7	6	5	4	3	2

Problema 12 [5]

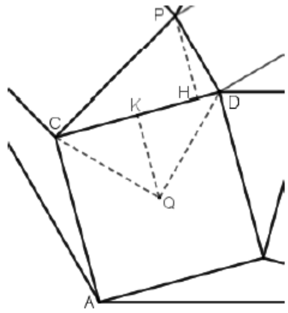
Il rettangolo è $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ dell'esagono centrale.





Abbiamo che $C\widehat{A}B = (120^\circ - 90^\circ) : 2 = 15^\circ$ e che $D\widehat{C}E = (360^\circ - 150^\circ - 2\cdot 90^\circ) : 2 = 15^\circ$. Inoltre $CA = CD$ e $C\widehat{B}A = 90^\circ = C\widehat{E}D$. Quindi i triangoli CED e CBA sono congruenti.

Sia ora Q il centro del quadrato e QK perpendicolare a CD. Costruiamo anche PH perpendicolare a CD. Dato che $PCD = 30°$ il triangolo PHD è $30 - 60 - 90$, abbiamo $PH = \frac{1}{2}CP = \frac{1}{2}CD$. Ma anche $KQ = \frac{1}{2}CD$.



Quindi i triangoli PCD e CQD sono equivalenti (base in comune e altezze congruenti). I 6 quadrati sono formati da 24 triangoli equivalenti a CQD. Nella corona esagonale (compresa tra l'esagono grande e quello piccolo), al di fuori dei quadrati, ci sono 12 triangoli equivalenti a PCD. Quindi i quadrati coprono $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ della corona esagonale. Complessivamente i quadrati insieme al rettangolo centrale coprono $\frac{2}{3}$ di tutto l'esagono.

Problema 13 [54]
Senza tener conto delle rotazioni, ci sono $\frac{6!}{2} = 360$ ettagoni: partendo dal primo vertice, bisogna scegliere in che ordine percorrere gli altri 6 vertici (quindi 6! modi), e poi dividere per 2 perché uno stesso ettagono può essere percorso in due sensi. Tra questi 360 ettagoni, ce ne sono 3 simmetrici rispetto a rotazioni di $\frac{2\pi}{7}$: si ottengono congiungendo ciascun vertice ai due più vicini (ettagono regolare), oppure ciascun vertice ai due vertici opposti (una stella a 7 punte), oppure ciascun vertice ai due vertici né adiacenti né opposti (un'altra stella a 7 punte). I rimanenti $360 - 3 = 357$ ettagoni non possiedono simmetrie di rotazione, e pertanto sono suddivisi in $\frac{357}{7} = 51$ gruppi di 7 ettagoni ottenibili uno dall'altro tramite rotazioni. La risposta è $51 + 3 = 54$.

Problema 14 [3051]
Siano α, β, γ le radici del polinomio. Allora abbiamo che

$$(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) = -(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = -p(1) = -(1 + a + b + c) = 2024.$$

Notiamo che, per ipotesi, $\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1 \geq 2$ e quindi, visto che $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 2023$, le uniche possibilità per (α, β, γ) sono $(8, 11, 23)$, $(4, 22, 23)$, $(4, 11, 46)$, $(3, 3, 507)$ $(3, 5, 254)$. Se

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$$

è il massimo possibile, allora vogliamo massimizzare le frazioni col denominatore minore e quindi $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 3, 507)$. Allora b è pari alla somma dei prodotti a coppie delle radici, ossia $b = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 507 + 3 \cdot 507 = 3051$, che è la risposta cercata.

Problema 15 [53] Poniamo $EB = a$, dunque $AE = 2a$ e $BC = 3a$. Siano H e K due punti sul lato AB tali che $FH \perp AB$, $GK \perp AB$ e sia $P \in FH$ tale che $GP \perp FH$. Considerando i triangoli rettangoli ADE e BCE abbiamo

$$DE = a\sqrt{13}, \quad CE = a\sqrt{10}, \quad AF = \frac{AD \cdot AE}{DE} = \frac{6a}{\sqrt{13}}, \quad BG = \frac{BC \cdot BE}{CE} = \frac{3a}{\sqrt{10}}.$$

Usando Euclide nel triangolo rettangolo AED otteniamo

$$FE = \frac{AE^2}{DE} = \frac{4a}{\sqrt{13}}$$

mentre nel triangolo rettangolo EBC otteniamo

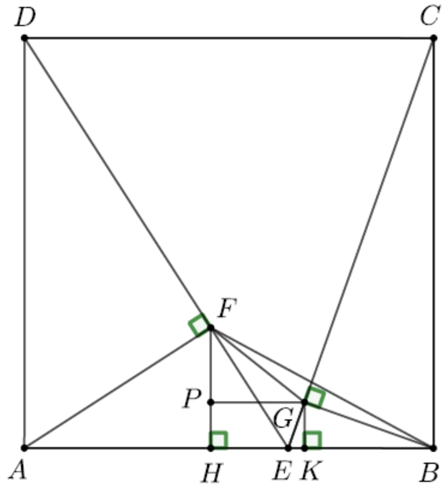
$$GE = \frac{EB^2}{CE} = \frac{a}{\sqrt{10}}$$

Inoltre nel triangolo rettangolo AFE abbiamo

$$FH = \frac{AF \cdot FE}{AE} = \frac{12}{13}a$$

e per il teorema di Euclide

$$HE = \frac{FE^2}{AE} = \frac{8}{13}a.$$



Analogamente nel triangolo rettangolo EBG abbiamo

$$GK = \frac{EG \cdot BG}{EB} = \frac{3}{10}a$$

e per il teorema di Euclide

$$EK = \frac{EG^2}{EB} = \frac{1}{10}a.$$

Calcoliamo i cateti del triangolo rettangolo FPG

$$PG = HE + EK = \frac{8}{13}a + \frac{1}{10}a = \frac{93}{130}a,$$

$$PF = FH - GK = \frac{12}{13}a - \frac{3}{10}a = \frac{81}{130}a.$$

Pertanto

$$FG^2 = PG^2 + PF^2 = \frac{9}{10}a^2,$$

da cui

$$FG = \frac{3}{\sqrt{13}}a = BG.$$

Osservato che il $\triangle FGB$ è isoscele, per calcolarne l'area, determiniamo la sua base FB e l'altezza h relativa a tale base

$$FB = \sqrt{FH^2 + HB^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{13}a\right)^2 + \left(\frac{21}{13}a\right)^2} = \frac{3a\sqrt{65}}{13},$$

$$h = \sqrt{GB^2 - \left(\frac{FB}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{10}}a\right)^2 - \left(\frac{3a\sqrt{65}}{2 \cdot 13}\right)^2} = \frac{3a}{2\sqrt{65}},$$

da cui

$$[FGB] = \frac{FB \cdot h}{2} = \frac{3a\sqrt{65}}{13} \cdot \frac{3a}{2\sqrt{65}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{52}a^2.$$

Sapendo che $[ABCD] = 9a^2$ otteniamo

$$\frac{[FGB]}{[ABCD]} = \frac{9a^2}{52} \cdot \frac{1}{9a^2} = \frac{1}{52}$$

e quindi $m + n = 1 + 52 = 53$.

Problema 16 [2030]
Per ipotesi sappiamo che:

- $p(x)$ ha resto 5 quando è diviso per $x - 6$ quindi per il teorema del resto $p(6) = 5$,
- $p(x)$ ha resto 6 quando è diviso per $x - 7$ quindi per il teorema del resto $p(7) = 6$,
- $p(x)$ ha resto 9 quando è diviso per $x - 8$ quindi per il teorema del resto $p(8) = 9$.

A questo punto determiniamo il resto $r(x)$ della divisione di $p(x)$ per il polinomio $(x-6)(x-7)(x-8)$. Per la divisione fra polinomi vale

$$p(x) = (x - 6)(x - 7)(x - 8)q(x) + r(x),$$

dove $r(x)$ è un polinomio di grado al massimo 2 quindi è del tipo $r(x) = ax^2 + bx + c$. Poiché sappiamo che $p(6) = 5$, $p(7) = 6$, e $p(8) = 9$, possiamo scrivere $r(6) = 5, r(7) = 6, r(8) = 9$. Per trovare i coefficienti a, b e c dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 36a + 6b + c = 5, \\ 49a + 7b + c = 6, \\ 64a + 8b + c = 9. \end{cases}$$

La soluzione del sistema è: $a = 1$, $b = -12$ e $c = 41$. Il resto è $r(x) = x^2 - 12x + 41$, pertanto la risposta è $r(51) = 2030$.

Problema 17 [1594]
Osserviamo che a, b, c devono essere tutti dispari, altrimenti i sette primi dati non sarebbero tutti distinti. Per massimizzare d possiamo, quindi, supporre che il minimo di essi sia 3. Senza perdita di generalità, inoltre, possiamo supporre che sia $a + b = 800$. Dato che $a + b - c > 0$, deve essere $c < 800$. Il massimo valore di $a + b + c$ si ottiene scegliendo $c = 797$ e vale 1597, che è primo. Di conseguenza d vale al massimo $1597 - 3 = 1594$. In effetti, per $a = 13$, $b = 787$, $c = 797$ si ottiene $d = 1594$, che è il numero cercato. Gli altri primi sono 3, 23, 1571 e 1597.

Problema 18 [1121] Sia a_n il numero di sequenze binarie di lunghezza $n - 1$ aventi al massimo due zeri consecutivi.
Calcolare a_{13}.

Soluzione.

Le sequenze richieste sono di due tipi.

- Quelle che iniziano con 1 che sono a_{n-1}.
- Quelle che iniziano con 0; queste, a loro volta, possono essere di due tipi: quelle che iniziano con 1 che sono a_{n-2} e quelle che iniziano con 0 che sono a_{n-3}, in quanto il terzo elemento di ciascuna di queste sequenze deve essere necessariamente 1.

Quindi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$. Poiché $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ e $a_4 = 7$, possiamo sostituire ricorsivamente questi valori nella relazione precedente ottenendo $a_{13} = 1705$.

Problema 19 [9]
Osserviamo che $ab = a - c$, $ac = c - b$, $bc = b - a$, da cui otteniamo $ab + ac + bc = 0$. Inoltre, sommando tra loro le tre uguaglianze, abbiamo anche

$$a + b + c + \frac{b^2a + a^2c + c^2b}{abc} = 3\,.$$

Notando che $b^2a + a^2c + c^2b = b(a-c) + a(c-b) + c(b-a) = 0$, deduciamo $a + b + c = 3$. Moltiplicando tra loro le uguaglianze fornite nel testo abbiamo

$$1 = \left(a + \frac{b}{c}\right)\left(b + \frac{c}{a}\right)\left(c + \frac{a}{b}\right) = 1 + abc + a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}.$$

Dopo aver osservato che $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 9$ e

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc} = \frac{(ab + ac + bc)^2 - 2abc(a + b + c)}{abc} = -6\,,$$

otteniamo $1 = 1 + abc + 9 - 6$, da cui $abc = -3$ e quindi $(abc)^2 = 9$.

Problema 20 [2025]
Fattorizziamo il trinomio nei complessi: $x_i^2 - x_i + 1 = (x_i - \omega_1)(x_i - \omega_2)$ dove $\omega_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\omega_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Notiamo che $\omega_1^3 = -1$, $\omega_2 = \omega_1^5$; queste relazioni ci permettono di esprimere tutto il calcolo in funzione di ω_1 e di operare molte semplificazioni. L'espressione diventa

$$\prod_{i=1}^{4}(x_i^2 - x_i + 1) = \prod_{i=1}^{4}(x_i - \omega_1)(x_i - \omega_1^5)\,.$$

In termini dei polinomi simmetrici elementari e_1, e_2, e_3, e_4 nelle radici, si può scrivere

$$\prod_{i=1}^{4}(x_i - \omega_1) = e_4 - \omega_1 e_3 + \omega_1^2 e_2 - \omega_1^3 e_1 + \omega_1^4 = e_4 - \omega_1 e_3 + \omega_1^2 e_2 + e_1 + \omega_1^4$$

$$\prod_{i=1}^{4}(x_i - \omega_1^5) = e_4 - \omega_1^5 e_3 + \omega_1^{10} e_2 \omega_1^{15} e_1 + \omega_1^{20} = e_4 - \omega_1^5 e_3 + \omega_1^4 e_2 + e_1 + \omega_1^2\,.$$

Notiamo che in base ai coefficienti di $p(x)$ i valori dei polinomi simmetrici elementari sono:

$$e_1 = -\frac{1}{2024}, \quad e_2 = 1 \quad e_3 = 0, \quad e_4 = -\frac{1}{2024}\,.$$

Sviluppando l'espressione otteniamo

$$\begin{aligned}
&(e_4 - \omega_1 e_3 + \omega_1^2 e_2 + e_1 + \omega_1^4) \cdot (e_4 - \omega_1^5 e_3 + \omega_1^4 e_2 + e_1 + \omega_1^2)\\
&= e_4 \cdot e_4 + e_4 \cdot (-\omega_1^5 e_3) + e_4 \cdot (\omega_1^4 e_2) + e_4 \cdot e_1 + e_4 \cdot \omega_1^2\\
&\quad - \omega_1 e_3 \cdot e_4 - \omega_1 e_3 \cdot (-\omega_1^5 e_3) - \omega_1 e_3 \cdot (\omega_1^4 e_2) - \omega_1 e_3 \cdot e_1 - \omega_1 e_3 \cdot \omega_1^2\\
&\quad + \omega_1^2 e_2 \cdot e_4 + \omega_1^2 e_2 \cdot (-\omega_1^5 e_3) + \omega_1^2 e_2 \cdot (\omega_1^4 e_2) + \omega_1^2 e_2 \cdot e_1 + \omega_1^2 e_2 \cdot \omega_1^2\\
&\quad + e_1 \cdot e_4 + e_1 \cdot (-\omega_1^5 e_3) + e_1 \cdot (\omega_1^4 e_2) + e_1 \cdot e_1 + e_1 \cdot \omega_1^2\\
&\quad + \omega_1^4 \cdot e_4 + \omega_1^4 \cdot (-\omega_1^5 e_3) + \omega_1^4 \cdot (\omega_1^4 e_2) + \omega_1^4 \cdot e_1 + \omega_1^4 \cdot \omega_1^2\\
&= e_4^2 + (-\omega_1^5 - \omega_1) e_4 e_3 + (\omega_1^4 + \omega_1^2) e_4 e_2 + 2e_4 e_1 + (\omega_1^2 + \omega_1^4) e_4\\
&\quad + \omega_1^6 e_3^2 + (-\omega_1^5 - \omega_1^7) e_3 e_2 + (-\omega_1^5 - \omega_1) e_3 e_1 + (-\omega_1^6 - \omega_1^9) e_3\\
&\quad + \omega_1^6 e_2^2 + (\omega_1^2 + \omega_1^4) e_2 e_1 + (\omega_1^4 + \omega_1^8) e_2\\
&\quad + e_1^2 + (\omega_1^2 + \omega_1^4) e_1 + \omega_1^6.
\end{aligned}$$

Perciò, dato che $\omega_1^6 = \omega_1 + \omega_1^5 = 1$ e $\omega_1^3 = \omega_1^2 + \omega_1^4 = -1$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{4}(x_i^2 - x_i + 1) &= e_4^2 - e_3e_4 - e_2e_4 + 2e_1e_4 - e_4 + e_3^2 - e_2e_3 - e_1e_3 + 2e_3 + e_2^2 - e_1e_2 - e_2 + e_1^2 - e_1 + 1 = \\
&= \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2024} + 2 \cdot \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2024} + 1 + \frac{1}{2024} - 1 + \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2024} + 1 = \\
&= \frac{1}{1012^2} + \frac{2}{1012} + 1 = \\
&= \left(1 + \frac{1}{1012}\right)^2 .
\end{aligned}$$

La radice quadrata di questa quantità perciò è $\frac{1013}{1012}$. La risposta è 2025.